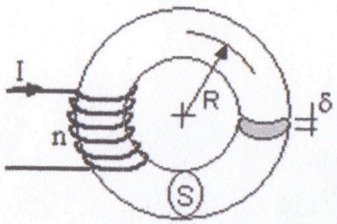
1) A Figura representa um circuito magnético constituído por um toro de material ferromagnético uniforme com permeabilidade magnética relativa μ_{Fe} em torno do qual se enrolaram n espiras de um fio condutor isolado; o toro tem o raio médio R, a seção reta uniforme S e um entreferro de espessura δ. Não existindo saturação, calcule:

a) a relutância magnética do ferro e do ar;
b) a relutância magnética total do núcleo;
c) o fluxo do campo magnético no toro;
d) os campos de indução e de excitação magnéticos no ferro e no ar;
e) o coeficiente de auto-indução da bobina;
f) a energia magnética armazenada no ferro e no ar;
g) a fmm necessária para duplicar o campo magnético de indução no ar.
h) os campos de indução e de excitação magnéticos, e a energia magnética, no ferro e no ar.

$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ Hm^{-1}$



R=2 cm; δ =1mm; S=0,79 cm^2; I=1 A; n=100; μ_{Fe}=7000.

a) $\ell = 2\pi R = 2\pi(2\times10^{-2}) = 12,6$ cm

$\delta = 1$ mm

$$R_{MFe} = \frac{\ell-\delta}{\mu_F S} = \frac{12,5\times10^{-2}}{7000\times4\pi\times10^{-7}\times0,79\times10^{-4}} = 0,180\times10^{6}\ \frac{Ae}{Wb}$$

$$R_{MAR} = \frac{\delta}{\mu_0 S} = \frac{1\times10^{-3}}{4\pi\times10^{-7}\times0,79\times10^{-4}} = 10,1\times10^{6}\ \frac{Ae}{Wb}$$

b) $R_T = R_{Fe} + R_{AR} = 10,3\times10^{6}$ Ae/Wb

c) $\phi = \frac{fmm}{R_m} = \frac{nI}{R_m} = \frac{100\times1}{10,3\times10^{6}} = 9,71\times10^{-6}$ Wb

d) $B = \frac{\phi}{S} = \frac{9,71\times10^{-6}}{0,79\times10^{-4}} = 123$ mT

$B_{Fe} = B_{AR}$ $\quad H_{Fe} = \frac{B_{Fe}}{\mu} = \frac{0,123}{7000\times4\pi\times10^{-7}} = 14,0$ A/m $\quad H_{AR} = \frac{B_{AR}}{\mu_0} = \frac{0,123}{4\pi\times10^{-7}} = 97,9\times10^{3}$ A/m

e) $L = \frac{n\phi}{i} = \frac{100\times9,71\times10^{-6}}{1} = 971\,\mu H$

f) $W = \frac{1}{2}\int BH\,dv \Rightarrow W = \frac{BHV}{2}$ $\quad W_{Fe} = \frac{B_{Fe}H_{Fe}}{2}(\ell-\delta)S = \frac{0,123\times14,0}{2}12,5\times10^{-2}\times0,79\times10^{-4} = 8,50\,\mu J$

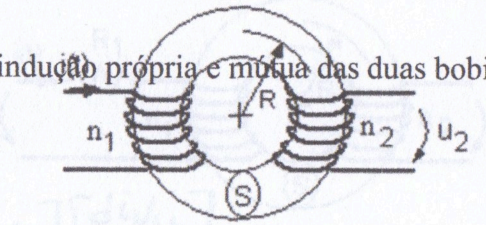
$W_{AR} = \frac{B_{AR}H_{AR}}{2}\delta S = \frac{0,123\times97,9\times10^{3}}{2}\times10^{-3}\times0,79\times10^{-4} = 476\,\mu J$ NOTE QUE $W_{Fe}+W_{AR} \sim \frac{1}{2}Li^2$

g) $fmm = NI = H\ell$. SÃO LINEARES, PARA DOBRAR O CAMPO BASTA DOBRAR A fmm

h) $\boxed{\text{ENUNCIADO ERRADO}}$ – ERA PARA REPETIR AS CONTAS PARA $\delta = 0,1$ mm. NOTE QUE, NESTE CASO R_{AR} FICA 10 VEZES MENOR ENTÃO R_T FICA QUASE 10 VEZES MENOR ENTÃO ϕ FICA ~10x MAIOR ENTÃO B ~ 10 VEZES MAIOR, L FICA 10x MAIOR ENTÃO A ENERGIA ARMAZENADA FICA ~ 10x MAIOR.

2) A Figura representa um circuito magnético constituído por um toro de material com permeabilidade magnética relativa μ_r, com o raio médio R e a secção reta uniforme S, em torno do qual se enrolaram duas bobinas de fios condutores isolados com n_1 e n_2 espiras, respectivamente. Considerando que não existe saturação, com a bobina n_2 em vazio, obtenha a tensão $u_2(t)$, nos seguintes casos:

a) $i(t) = 1\ A$;
b) $i(t) = 1+2t$ A;
c) $i(t) = 2\cos(\omega t)$ A.
d) Para o circuito da Figura, obtenha os coeficientes de indução própria e mútua das duas bobinas.



$\mu_O = 4\pi.10^{-7}$ Hm^{-1} R=2 cm; S=0,79 cm^2; n_1=100; n_2=50; μ_r=1000;

COMO A BOBINA 2 ESTÁ EM VAZIO $i_2 = 0$

$$R_m = \frac{l}{\mu S} = \frac{2\pi R}{\mu S} = \frac{2\pi \times 2\times10^{-2}}{1000\times 4\pi\times10^{-7}\times 0{,}79\times10^{-4}} = 1{,}27\times10^{6}\ Ae/Wb$$

$$M = \frac{n_1 n_2}{R_m} = \frac{100\times 50}{1{,}27\times10^{6}} = 3{,}94\times10^{-3}\ H \qquad u_2 = M\frac{di_1}{dt}$$

a) $\frac{di_1}{dt} = 0 \Rightarrow u_2 = 0$ b) $\frac{di_1}{dt} = 2A/s \Rightarrow u_2 = 3{,}94\times10^{-3}\times 2 = 7{,}88\times10^{-3}\ V$

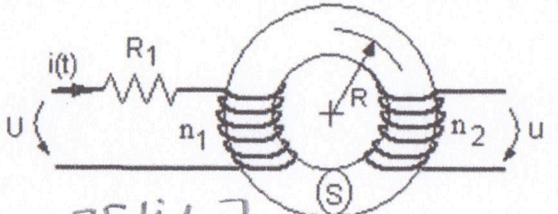
c) $\frac{di_1}{dt} = -2\omega \operatorname{sen} \omega t\ A/s$ $u_2(t) = 3{,}94\times10^{-3}\times 2\omega \operatorname{sen} \omega t = 7{,}88\times10^{-3}\ \omega \operatorname{sen} \omega t\ V$

d) $L = \frac{n_1^2}{R_m} = \frac{100^2}{1{,}27\times10^{6}} = 7{,}90\times10^{-3}\ H$ $M = 3{,}94\times10^{-3}\ H$

3) Na Figura, R_1=3Ω representa a resistência da bobina n_1 enrolada em torno do toro. Obtenha:
(a) a corrente $i(t)$ quando se liga uma tensão contínua U=6V à bobina n_1, com $i(0)$=0;
(b) a tensão $u_2(t)$, quando se liga tensão contínua da (a).

$$R_m = \frac{2\pi R}{\mu S} \qquad L_1 = \frac{n_1^2}{R_m} \qquad M = \frac{n_1 n_2}{R_m}$$

FALTA DADOS PARA UMA SOLUÇÃO NUMÉRICA



$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} di_1/dt \\ di_2/dt \end{bmatrix}$$

COMO A BOBINA 2 ESTÁ EM VAZIO $i_2 = 0 \quad \frac{di_2}{dt} = 0$
E $R_2 = 0$ (NÃO HÁ RESISTÊNCIA)

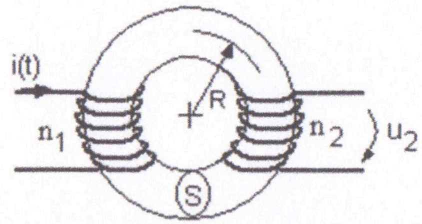
ASSIM

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} di_1/dt \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \\ u_2 = M \frac{di_1}{dt} \end{array}$$

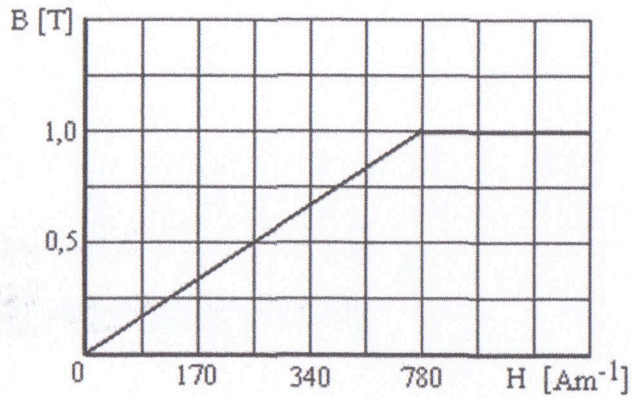
a) CONSIDERANDO $u_1 = 6V$, PELA 1ª EQUAÇÃO $i_1(t) = \frac{u_1}{R_1}\left(1 - e^{-R_1 t/L_1}\right) = 2\left(1 - e^{-3t/L_1}\right)$
E $i_1(0) = 0$

b) $u_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} = M 2 \times \frac{3}{L_1} e^{-3t/L_1} = 6 \frac{M}{L_1} e^{-3t/L_1}$

4) Considere o circuito magnético da Figura. O material do toro tem a característica de magnetização aproximada descrita no gráfico. A bobina n_2 está em vazio.



R=2 cm; S=1 cm^2; n_1=100; n_2=100; μ_r=1000; μ_O= $4\pi.10^{-7}$ Hm^{-1}



Obtenha o diagrama temporal da tensão $u_2(t)$ se $i(t)$=2cos(314t) A.

SE NÃO HÁ SATURAÇÃO, COMO INDICA A CURVA, O PROBLEMA SE RESOLVE DA MESMA FORMA QUE O ANTERIOR (3)

$$R_m = \frac{l}{\mu S} = \frac{2\pi R}{\mu S} = \frac{2\pi \times 2\times10^{-2}}{1000\times 4\pi\times10^{-7}\, 1\times10^{-4}} = 1{,}0\times10^{6}\ \frac{Ae}{Wb}$$

$$M = \frac{n_1 n_2}{R_m} = \frac{100\times100}{1{,}0\times10^{6}} = 10{,}0\ mH$$

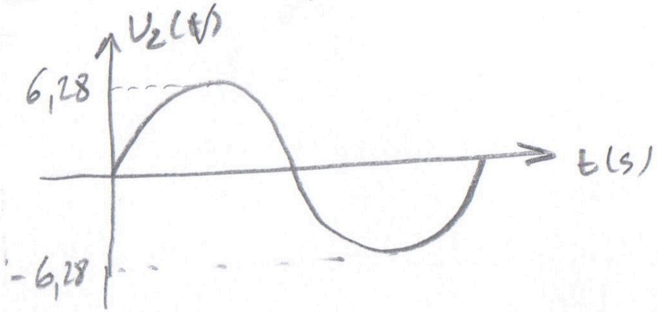
$$u_2(t) = M\frac{di_1}{dt} \quad \text{MAS} \quad \frac{di_1}{dt} = -2\times 314\ \text{sen}\ 314t$$

$$\frac{di_1}{dt} = 628\ \text{sen}\ 314t\ A/s$$

ASSIM $u_2(t) = 10\times10^{-3}\times 628\ \text{sen}\ 314t$

$$u_2(t) = 6{,}28\ \text{sen}\ 314t\ V$$

SEM SATURAÇÃO O GRÁFICO SERIA



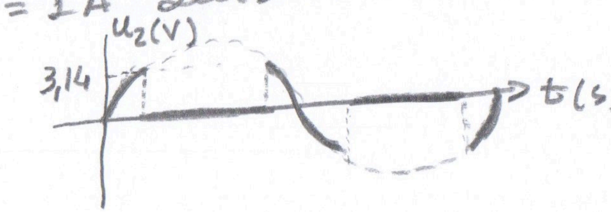
MAS $f_{mm} = R_m \phi = R_m BS \Rightarrow B = \frac{n_1 i_1}{R_m S}$

COMO i_1 VARIA DE $-2A$ ATÉ $2A$

QUANDO $i_1 = 2A$ $\quad B = \frac{100\times 2}{1\times10^{6}\times10^{-4}} = 2T$

MAS B SATURA EM 1T, ISTO É, ELE NÃO VARIA PARA CORRENTES ACIMA DE 1A ENTÃO u_2 É ZERO QUANDO $1A \leq |i_1| \leq 2A$. QUANDO $i_1 = 1A$ $\quad \text{sen}\ 314t = 1/2$

ENTÃO O GRÁFICO FICA



10.8 Em um certo meio, com $\mu = \mu_o$, $\varepsilon = 4\varepsilon_o$,

$$\mathbf{H} = 12e^{-0.1y} \operatorname{sen}(\pi \times 10^8 t - \beta y)\, \mathbf{a}_x \ \text{A/m}$$

encontre: (a) o período da onda T; (b) o comprimento de onda λ; (c) o campo elétrico $\mathbf{E}$; (d) a diferença de fase entre $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$.

a) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \times 10^8 \ rad/s \Rightarrow T = 2\times10^{-8} \ seg = 20 \ ns$

b) $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 4\varepsilon_0}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{c}{2} = \frac{\omega}{\beta} \Rightarrow \beta = \frac{2\omega}{c} = \frac{2\times\pi\times10^8}{3\times10^8} = \frac{2\pi}{3} \frac{rad}{m} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 3 \, m$

c) SE $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha y} \operatorname{sen}(\omega t - \beta y)$ ENTÃO $\vec{H} = \frac{\vec{E}_0}{|\eta|} e^{-\alpha y} \operatorname{sen}(\omega t - \beta y - \theta_0)$ ONDE $tg\,\theta_0 = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$

COMO O MEIO NÃO É CONDUTOR $\sigma = 0$ $\theta_0 = 0$ ENTÃO $E_0 = \eta H_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_0$

$\hat{a}_k \times \hat{a}_H = -\hat{a}_E \Rightarrow \hat{a}_E = -\hat{a}_y \times \hat{a}_x = \hat{a}_z$

$E_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi\times10^{-7}}{8{,}85\times10^{-12}}}\, 12 = 2{,}26\times10^3 \ V/m$

ASSIM $\vec{E} = 2{,}26\, e^{-0{,}1y} \operatorname{sen}(\pi\times10^8 t - \frac{2\pi}{3} y)\hat{a}_z \ kV/m$

d) θ_0 É A DIFERENÇA DE FASE ENTRE $\vec{E}$ E $\vec{H}$

ENTÃO $\vec{H}$ E $\vec{E}$ ESTÃO EM FASE.

$\alpha = 0{,}1$ $\beta = \frac{2\pi}{3}$ $\alpha^2 + \beta^2 = \omega\mu\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{\omega^2\mu^2} = \sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2 \Rightarrow \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{\omega^4\mu^2\varepsilon^2} - 1}$

Substituindo $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \sim 0 \Rightarrow \sigma \sim 0$ $tg\,2\theta_n = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \sim 0 \Rightarrow \theta_n \sim 0$

NÃO HÁ DIFERENÇA DE FASE ENTRE $\vec{E}$ E $\vec{H}$

10.11 A componente do campo magnético de uma onda EM, propagando-se em um meio não magnético ($\mu = \mu_o$), é:

$$\mathbf{H} = 25 \text{ sen } (2 \times 10^8 t + 6x) \, \mathbf{a}_y \text{ mA/m}$$

Determine:

(a) a orientação de propagação da onda;

(b) a permissividade do meio;

(c) o módulo do campo elétrico.

a) A PROPAGAÇÃO É NO SENTIDO $-\hat{a}_x$ POR CAUSA DO SINAL DE β $(+6x)$

b) $\frac{\omega}{\beta} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \Rightarrow \mu\varepsilon = \frac{\beta^2}{\omega^2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\beta^2}{\mu_o \omega^2} = \frac{6^2}{4\pi\times10^{-7}(2\times10^8)^2} = 716\times10^{-12} \text{ C/Tm}^2$

$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = \frac{716\times10^{-12}}{8{,}85\times10^{-12}} = 81$

c) $E_o = \eta H_o = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon}} H_o = \sqrt{\frac{4\pi\times10^{-7}}{716\times10^{-12}}} \, 25\times10^{-3} = 1{,}05 \text{ V/m}$

***10.14** Assumindo que os campos dependentes do tempo $\mathbf{E} = \mathbf{E}_o e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$ e $\mathbf{H} = \mathbf{H}_o e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$, onde $\mathbf{k} = k\mathbf{a}_x + k_y\mathbf{a}_y + k_z\mathbf{a}_z$ é o vetor número de onda e $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ é o vetor radial, mostre que $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ pode ser expressa como $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mu\omega\mathbf{H}$ e deduza que $\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_E = \mathbf{a}_H$.

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{a}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{a}_z$$

COMO $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = j\left[(k_y E_z - k_z E_y)\hat{a}_x + (k_z E_x - k_x E_z)\hat{a}_y + (k_x E_y - k_y E_x)\hat{a}_z\right] = j\vec{k}\times\vec{E}$$

JÁ $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \mu\vec{H}_0\dfrac{\partial}{\partial t}e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = -j\mu\omega\vec{H}$ ENTÃO $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{k}\times\vec{E} = \mu\omega\vec{H}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{E} = 0$ ENTÃO $|\vec{k}\times\vec{E}| = kE$

SE $\vec{k}\times\vec{E} = kE(\hat{a}_k\times\hat{a}_E)$ ENTÃO $kE(\hat{a}_k\times\hat{a}_E) = \mu\omega H a_H$

MAS $|\vec{k}\times\vec{E}| = |\mu\omega\vec{H}| \Rightarrow kE = \mu\omega H$ ASSIM $\hat{a}_k\times\hat{a}_E = \hat{a}_H$

10.15 Considere os mesmos campos do Problema 10.14 e mostre que as equações de Maxwell, em uma região livre de cargas, podem ser escritas como

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mu\mathbf{H}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

Destas equações, deduza

$$\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_E = \mathbf{a}_H \qquad \text{e} \qquad \mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_H = -\mathbf{a}_E$$

$\hat{a}_k \times \hat{a}_E = \hat{a}_H$ — JÁ PROVADO EM 10.14

$\vec{k} \cdot \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{H}$ ENTÃO $|\vec{k} \times \vec{H}| = kH$

$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega\varepsilon\vec{E} \Rightarrow |\vec{k} \times \vec{H}| = \omega\varepsilon|\vec{E}| \Rightarrow kH = \omega\varepsilon E$

COMO $k\hat{a}_k \times H\hat{a}_H = -\omega\varepsilon E\hat{a}_E$ ENTÃO $\hat{a}_k \times \hat{a}_H = -\hat{a}_E$

?

10.26 Uma onda plana uniforme, em um meio não magnético $\boxed{\text{sem perdas}}$ tem:

$$\mathbf{E}_s = (5\mathbf{a}_x + 12\mathbf{a}_y)\mathbf{e}^{-\gamma z},\ \gamma = 0{,}2 + j3{,}4/\text{m}$$

(a) Calcule a amplitude da onda em $z = 4$ m.

(b) Encontre a perda de energia, em dB, da onda no intervalo $0 < z < 3$ m.

(c) Calcule o vetor de Poynting em $z = 4$ e $t = T/8$. Considere $\omega = 10^8$ rad/s.

$$\vec{E}_s = (5\hat{a}_x + 12\hat{a}_y)\, \underbrace{e^{-0{,}2z}}_{\text{TERMO DE PERDA DA AMPLITUDE}}\, e^{-j3{,}4z}$$ – TERMO DE OSCILAÇÃO

a) EM $z = 4\,m$ $\quad \vec{E} = (5\hat{a}_x + 12\hat{a}_y)\, e^{-0{,}8}\, e^{-j13{,}6}$

AMPLITUDE $|\vec{E}_M| = \sqrt{5^2 + 12^2}\, e^{-0{,}8} = 5{,}84\ V/m$

b) PARA $z = 0$ $\quad E_{M_0} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\ V/m$

PARA $z = 3\,m$ $\quad E_{M_3} = \sqrt{5^2 + 12^2}\, e^{-0{,}6} = 7{,}13\ V/m$

$\text{PERDA} = 10 \log\left(\frac{E_{M0}}{E_{M3}}\right) = 10 \log\left(\frac{13}{7{,}13}\right)$

PERDA = 2,6 dB

c) $\vec{E} = (5\hat{a}_x + 12\hat{a}_y)\, e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \qquad \vec{k} = \beta \hat{a}_z$

$$\hat{a}_k \times \hat{a}_E = \hat{a}_H \Rightarrow \hat{a}_H = \hat{a}_z \times \frac{(5\hat{a}_x + 12\hat{a}_y)}{\sqrt{5^2+12^2}} = -\frac{5}{13}\hat{a}_y - \frac{12}{13}\hat{a}_x$$

$$\gamma = \alpha + j\beta \qquad \alpha^2 + \beta^2 = \omega\mu\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2} = \omega^2\mu\varepsilon\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\omega^2\mu\varepsilon}$$

$$|\eta| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\left[1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{1/4}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$\boxed{|\eta| = \frac{10^8\, 4\pi\times10^{-7}}{\sqrt{0{,}2^2 + 3{,}4^2}} = 36{,}9\,\Omega}$$

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2\mu\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{\beta^2-\alpha^2}{\omega^2\mu_0} = \frac{3{,}4^2 - 0{,}2^2}{10^{16}\, 4\pi\times10^{-7}} = 917\times10^{-12}\ C^2/N^2m^2 \qquad \varepsilon_R = 104$$

$$\alpha^2 = \omega^2 \frac{\mu_0\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1\right] \Rightarrow \sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} = \frac{2\alpha^2}{\omega^2\mu_0\varepsilon} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\left[\frac{2\alpha^2}{\omega^2\mu_0\varepsilon}+1\right]^2 - 1} = \sqrt{\left[\frac{2\cdot 0{,}2^2}{10^{16}\, 4\pi\times10^{-7}\, 917\times10^{-12}} + 1\right]^2 - 1} \cong 0{,}12$$

$tg\, 2\theta_\eta = 0,12 \quad 2\theta_\eta \sim 0,12 \quad \theta_\eta \sim 0,06\ rad$

PERDA MUITO PEQUENA, DIFERENÇA DE FASE ENTRE $\vec{E}$ e $\vec{H}$ MUITO PEQUENA.

$$\vec{H} = \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos(\beta z - \omega t)\, \hat{a}_H = \frac{13}{36,9} e^{-0,2z} \cos(3,4z - 10^8 t)\left(-\frac{5}{13}\hat{a}_y - \frac{12}{13}\hat{a}_x\right)$$

$$\vec{H} = -(0,325\hat{a}_x + 0,136\hat{a}_y) e^{-0,2z} \cos(3,4z - 10^8 t)\ A/m$$

PARA $z = 4m \quad t = T/8$

$$\vec{E} = (5\hat{a}_x + 12\hat{a}_y) e^{-0,8} \cos(13,6 - \pi/4) = (2,18\hat{a}_x + 5,23\hat{a}_y)$$

$$\vec{H} = -(0,325\hat{a}_x + 0,136\hat{a}_y) e^{-0,8} \cos(13,6 - \pi/4) = -0,142\,\hat{a}_x - 0,059\,\hat{a}_y$$

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = 2,18 \times (-0,059)\,\hat{a}_z + 5,23 \times (-0,142)(-\hat{a}_z) = 0,614\,\hat{a}_z\ W/m^2$$

10.36 Uma onda plana uniforme de 30 MHz com

$$\mathbf{H} = 10 \text{ sen } (\omega t + \beta x)\, \mathbf{a}_z \text{ mA/m}$$

existe em uma região $x \geq 0$, tendo $\sigma = 0$, $\varepsilon_r = 9\varepsilon_0\, \mu = 4\mu_0$. Em $x = 0$, a onda encontra o espaço livre. Determine: (a) a polarização da onda; (b) a constante de fase β; (c) a densidade de corrente de deslocamento na região $x \geq 0$; (d) os campos magnético refletido e transmitido e (e) a densidade média de potência em cada região.

$f = 30 \times 10^{-6} \quad \omega = 2\pi f$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{4\mu_0 9\varepsilon_0}} = \frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{c}{6}$$

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{6} \Rightarrow \beta = \frac{6\omega}{c} = \frac{6 \times 2\pi \times 30 \times 10^6}{3 \times 10^8} = 3{,}77 \text{ rad/m}$$

$$\vec{H} = 10 \times 10^{-3} \text{ sen}(1{,}88 \times 10^8 t + 3{,}77x)\, \hat{a}_z \text{ A/m}$$

$\beta E = \omega H$ e $\hat{a}_k \times \hat{a}_H = -\hat{a}_E$

$$E = \frac{\omega}{\beta} H = \frac{188 \times 10^6}{3{,}77} 10 \times 10^{-3} = 50 \times 10^4 \frac{V}{m}$$

$$\hat{a}_k = -\hat{a}_x \quad \hat{a}_H = \hat{a}_z \Rightarrow \hat{a}_E = +\hat{a}_x \times \hat{a}_z = -\hat{a}_y$$

a) $\vec{E} = -50 \times 10^4 \text{ sen}(1{,}88 \times 10^8 t + 3{,}77x)\, \hat{a}_y$

b) $\beta = 3{,}77$ rad/m

c) $\vec{J}_D = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 9\varepsilon_0 \left[-50 \times 10^4 \times 1{,}88 \times 10^8 \cos(1{,}88 \times 10^8 t + 3{,}77x)\, \hat{a}_y\right]$

$$\vec{J}_D = -7{,}49 \cos(1{,}88 \times 10^8 t + 3{,}77x)\, \hat{a}_y \text{ KA/m}^2$$

d) $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} \quad \eta_1 = \sqrt{\dfrac{4\mu_0}{9\varepsilon_0}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \dfrac{2}{3}\eta_2 \quad H_{R_0} = -\Gamma H_{I_0} = -\dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} H_{I_0} = -\dfrac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} H_{I_0} = -\dfrac{H_{I_0}}{5}$

$$H_{T_0} = \tau \frac{\eta_1}{\eta_2} H_{I_0} = \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} H_{I_0} = \frac{2\, 2/3}{\frac{2}{3} + 1} H_{I_0} = \frac{4}{5} H_{I_0}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\,\Omega \qquad \eta_1 = \frac{2}{3}\eta_2 = 251\,\Omega$$

$$\vec{H}_R = -2\,\mathrm{sen}(1{,}88\times10^8 t + 3{,}77x)\,\hat{a}_z \ \mathrm{mA/m}$$

$$\vec{H}_T = 8\,\mathrm{sen}(1{,}88\times10^8 t + 3{,}77x)\,\hat{a}_z \ \mathrm{mA/m}$$

NOTE, NA FRONTEIRA

$$\vec{H}_I + \vec{H}_R = \vec{H}_T$$

e) REGIÃO 1

$$P_{MED} = \frac{E_{0I}^2}{2\eta_1} - \frac{E_{0R}^2}{2\eta_1} \qquad E_{0I}^2 = \eta_1^2 H_{0I}^2 \qquad E_{0R}^2 = \eta_1^2 H_{0R}^2$$

$$P_{MED} = \eta_1 \frac{H_{0I}^2}{2} - \eta_1 \frac{H_{0R}^2}{2} = \frac{377}{2}\left[(10\times10^{-3})^2 - (2\times10^{-3})^2\right] = 18{,}1\ \mathrm{mW/m^2}$$

REGIÃO 2

$$P_{MED} = \frac{E_{T0}^2}{2\eta_2} = \eta_2 \frac{H_{0T}^2}{2} = \frac{251}{2}(8\times10^{-3})^2 = 8{,}0\ \mathrm{mW/m^2}$$

SÓ A ONDA INCIDENTE

$$P_{MED\,I} = \frac{E_{I0}^2}{2\eta_1} = \eta_1 \frac{H_{I0}^2}{2} = \frac{377}{2}(10\times10^{-3})^2 = 18{,}9\ \mathrm{mW/m^2}$$

NOTE: $P_I = P_1 + P_2$

11.4 Uma linha planar sem perdas de 78 Ω foi projetada, mas não alcançou seus objetivos. Que fração da largura da fita deve ser adicionada ou removida para se alcançar a impedância característica de 75 Ω?

PARA LINHA SEM PERDA $Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu d/w}{\sigma w/d}} = \frac{d}{w}\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}$

$\frac{d}{w_0}\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} = 78\Omega \qquad d\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} = 78\, w_0 = 75\, w_1 \Rightarrow w_1 = \frac{78}{75} w_0 = 1{,}04\, w_0$

PARA A IMPEDÂNCIA SER 75Ω TEM QUE AUMENTAR 4% DA LARGURA ORIGINAL

11.5 Uma linha telefônica tem os seguintes parâmetros:

$R = 40\ \Omega/m \quad G = 400\ \mu S/m, \quad L = 0{,}2\ \mu H/m, \quad C = 0{,}5\ nF/m$

(a) Se a linha opera em 10 MHz, calcule a impedância característica Z_o e a velocidade u. (b) Depois de quantos metros a tensão na linha cai de 30 dB?

$RC = 40 \times 0{,}5 \times 10^{-9} = 20 \times 10^{-9}\ S/m^2$

$GL = 400 \times 10^{-6} \times 0{,}2 \times 10^{-6} = 80 \times 10^{-12}\ S/m^2$

COMO $RC \neq GL$ HÁ DISTORSÃO

$$a + jb = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta) \qquad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad tg\,\theta = \frac{b}{a}$$

$$a + jb = \sqrt{a^2+b^2}\, e^{j\theta}$$

$$Z_o = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}\, e^{j\theta_1}}{\sqrt{G^2+\omega^2 C^2}\, e^{j\theta_2}}} = \left[\frac{R^2+\omega^2 L^2}{G^2+\omega^2 C^2}\right]^{1/4} e^{j\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)} \qquad tg\,\theta_1 = \frac{\omega L}{R} \qquad tg\,\theta_2 = \frac{\omega C}{G}$$

$$Z_o = \left[\frac{40^2 + (2\pi\, 10 \times 10^6)^2 (0{,}2 \times 10^{-6})^2}{(400 \times 10^{-6})^2 + (2\pi \times 10 \times 10^6)^2 (0{,}5 \times 10^{-9})^2}\right]^{1/4} e^{j\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)} \qquad tg\,\theta_1 = \frac{(2\pi \times 10 \times 10^6)(0{,}2 \times 10^{-6})}{40}$$

$$tg\,\theta_2 = \frac{(2\pi \times 10 \times 10^6)(0{,}5 \times 10^{-9})}{400 \times 10^{-6}}$$

0,4

$$Z_o = 36{,}5\, e^{j(0{,}304 - 1{,}56)}\ \Omega = 36{,}5\, e^{j0{,}756}\ \Omega$$

$$V = V_o e^{-\gamma t} \qquad \gamma = \alpha + j\beta \quad \text{MAS} \quad \gamma = Z_o(G + j\omega C) = (R_o + jX_o)(G + j\omega C)$$

$$\gamma = (R_o G - X_o \omega C) + j(X_o G + R_o \omega C) \Rightarrow \alpha = R_o G - X_o \omega C \quad \text{MAS} \quad R_o = 36{,}5 \cos 0{,}756$$

E $X_o = 36{,}5\ \text{sen}\ 0{,}756$ ENTÃO $\alpha = (26{,}6 \times 400 \times 10^{-6} - 25{,}0 \times 2\pi \times 10^3 \times 0{,}5 \times 10^{-9}) = 10{,}6 \times 10^{-3}$

$V = V_0 e^{-\alpha x} e^{j\beta t}$ PARA A AMPLITUDE $\frac{V(x)}{V(0)} = e^{-\alpha x}$ $\alpha x = \ln \frac{V_0}{V(x)}$

$x = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{V_0}{V(x)}$ MAS $10 \log \frac{V_0}{V(x)} = 30$ $\log \frac{V_0}{V(x)} = 3$ $\frac{V_0}{V(x)} = 10^3$

$x = \frac{1}{10{,}6 \times 10^{-3}} \ln 10^3 = \frac{3}{10{,}6 \times 10^{-3}} \ln 10 = 652\,m$

11.6 Uma linha sem distorção, que opera em 120 MHz, tem $R = 20\ \Omega/m$, $L = 0,3\ \mu H/m$ e $C = 63\ pF/m$. (a) Determine γ, u e Z_o. (b) Que distância se propagará uma onda de tensão antes que sua amplitude caia para 20% do valor inicial? (c) Que distância a onda deve se propagar para sofrer uma mudança de fase de 45°?

SEM DISTORÇÃO $\dfrac{R}{L} = \dfrac{G}{C} \Rightarrow G = \dfrac{RC}{L} = \dfrac{20 \times 63 \times 10^{-12}}{0,3 \times 10^{-6}} = 4,2\ mS/m$

a) $\gamma = \sqrt{RG}\left(1 + j\dfrac{\omega C}{G}\right) = \sqrt{20 \times 4,2 \times 10^{-3}}\left(1 + j\dfrac{2\pi \times 120 \times 10^{6} \times 63 \times 10^{-12}}{4,2 \times 10^{-3}}\right)$

$\gamma = 0,29(1 + j\,11,3) = 0,29 + j\,3,28\ m^{-1}$

$u = \dfrac{\omega}{\beta} = \dfrac{2\pi\ 120 \times 10^{6}}{3,28} = 2,30 \times 10^{8}\ m/s$

$Z_o = \sqrt{\dfrac{R}{G}} = \sqrt{\dfrac{20}{4,2 \times 10^{-3}}} = 69\ \Omega$

b) NA AMPLITUDE $V = V_o e^{-\alpha z} \Rightarrow \alpha z = \ln\dfrac{V_o}{V} = \ln 5 \Rightarrow z = \dfrac{1}{0,29}\ln 5 = 5,5\ m$

c) $\beta z = \pi/4 \quad z = \pi/4\beta = \pi/4 \times 11,3 = 0,07\ m = 7\ cm$

11.12 Uma linha coaxial com 5,6 m de comprimento tem como parâmetros distribuídos $R = 6{,}5\ \Omega/\text{m}$, $L = 3{,}4\ \mu\text{H/m}$, $G = 8{,}4\ \text{mS/m}$ e $C = 21{,}5\ \text{pF/m}$. Se a linha opera em 2 MHz, calcule a impedância característica e o tempo de propagação entre os extremos da linha.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}} = \sqrt{\frac{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\,e^{j\theta_1}}{\sqrt{G^2+\omega^2C^2}\,e^{j\theta_2}}} = \left[\frac{R^2+\omega^2L^2}{G^2+\omega^2C^2}\right]^{1/4} e^{j\frac{(\theta_1-\theta_2)}{2}}$$

ONDE $tg\,\theta_1 = \frac{\omega L}{R}$

$tg\,\theta_2 = \frac{\omega C}{G}$

$$Z_0 = \left[\frac{\overbrace{6{,}5^2+(2\pi\cdot 2\times10^6)^2(3{,}4\times10^{-6})^2}^{=1868}}{\underbrace{(8{,}4\times10^{-3})^2+(2\pi\,2\times10^6)^2(21{,}5\times10^{-12})^2}_{71{,}29\times10^{-6}}}\right]^{1/4} e^{j\theta} = 71{,}6\,e^{j\theta}\ \Omega$$

$\theta_1 = \text{arctg}\,\frac{2\pi 2\times10^6\ 3{,}4\times10^{-6}}{6{,}5}$

$\theta_1 = 1{,}42$ rad

$\theta_2 = \text{arct}\,\frac{2\pi 2\times10^6\ 21{,}5\times10^{-12}}{8{,}4\times10^{-3}}$

$\theta_2 = 0{,}032$ rad

$\theta_1 - \theta_2 = 1{,}39$ rad

$\theta_1 + \theta_2 = 1{,}45$ rad

$$\gamma = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)} = \sqrt{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\sqrt{G^2+\omega^2C^2}\,e^{j\frac{(\theta_1+\theta_2)}{2}}}$$

$$\gamma = \left\{\left[6{,}5^2+(2\pi 2\times10^6)^2(3{,}4\times10^{-6})^2\right]\left[(8{,}4\times10^{-3})^2+(2\pi 2\times10^6)^2(21{,}5\times10^{-12})^2\right]\right\}^{1/4}$$

$$\gamma = (1868\times 71{,}29\times10^{-6})^{1/4} e^{j\,1{,}45} = 0{,}604\cos 1{,}45 + j\,0{,}64\,\text{sen}\,1{,}45$$

$$\gamma = 0{,}073 + j\,0{,}64\ \text{m}^{-1} \qquad u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi 2\times10^6}{0{,}64} = 1{,}96\times10^6\ \text{m/s}$$

$$t = \frac{d}{u} = \frac{5{,}6}{1{,}96\times10^6} = 2{,}9\ \mu\text{s}$$

11.16 Encontre a impedância de entrada do cabo coaxial curto-circuitado, da Figura 11.44, se $Z_o = 65 + j38\ \Omega$, $\gamma = 0{,}7 + j2{,}5$ /m, $\ell = 0{,}8$ m.

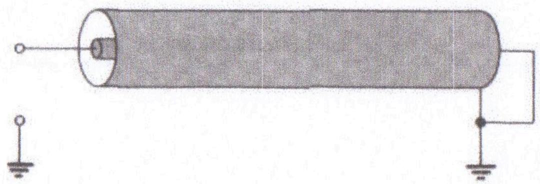


Figura 11.44 Referente ao Problema 11.16.

LINHA EM CURTO $Z_{ent} = Z_0 \, tg\, \beta l$

$Z_0 = \sqrt{R_0^2 + X_0^2} = \sqrt{65^2 + 38^2} = 75\ \Omega$

$Z_{ent} = 75\ tg\ 2{,}5 \times 0{,}8 = 75\ tg\ 2 = -164\ \Omega$ CAPACITIVO